|  |
| --- |
| МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  федеральное государственное АВТОНОМНОЕ образовательное учреждение высшего образования  «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» |
| **Обнинский институт атомной энергетики –**  филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  **(ИАТЭ НИЯУ МИФИ)** |

|  |
| --- |
| Утверждено на заседании  УМС ИАТЭ НИЯУ МИФИ  Протокол №2-8/2021 От 30.08.2021 |

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

|  |
| --- |
| Обобщённые функции |
| *Шифр, название дисциплины* |
|  |
|  |
|  |
| 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» |
| *Шифр, название специальности/направления подготовки* |
|  |
| Математическая физика и математическое моделирование  *Название программы магистратуры* |
|  |
| магистр |
| *(Квалификация (степень) выпускника)* |
|  |
|  |
| Форма обучения: очная |

**г. Обнинск 2021 г.**

Программа составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта высшего образования национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» по направлению подготовки 01.04.02 – Прикладная математика и информатика. (квалификация (степень) магистр).

Программу составила:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ А.Н. Чепурко, доцент, к.ф.-м.н, доцент

Рецензент:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Г.Е. Деев, доцент, к.ф.-м.н, доцент

Программа рассмотрена на заседании ОИКС

(протокол № 5/7 от «30» июля от 2021 г.)

Руководитель направления подготовки 01.03.02

«Прикладная математика и информатика»

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Ермаков С.В.

«\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2021 г.

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения ООП магистратуры обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Коды компетенций | **Результаты освоения ООП**  **Содержание компетенций\*** | **Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине\*\*** |
| УК-1 | Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий | З-УК-1 Знать: методы системного и критического анализа; методики разработки стратегии действий для выявления и решения проблемной ситуации  У-УК-1 Уметь: применять методы системного подхода и критического анализа проблемных ситуаций; разрабатывать стратегию действий, принимать конкретные решения для ее реализации  В-УК-1 Владеть: методологией системного и критического анализа проблемных ситуаций; методиками постановки цели, определения способов ее достижения, разработки стратегий действий. |
| ОПК-1 | Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики | З-ОПК-1 Знать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики, методы математического моделирования.  У-ОПК-1 Уметь использовать методы математического моделирования для решения задач фундаментальной и прикладной математики.  В-ОПК-1 Владеть методами математического моделирования и основами их использования. |

2. Место дисциплины в структуре ООП магистратуры

Дисциплина реализуется в рамках вариативной части.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, сформированные в рамках изучения следующих дисциплин: «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики», «Функциональный анализ».

Дисциплина изучается на 1 курсе в 1 семестре.

3. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость (объем) дисциплины составляет 5 зачетных единиц (з.е.), 180 академических часа.

3.1. Объём дисциплины по видам учебных занятий (в часах)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Объем дисциплины | Всего часов | |
| Очная форма обучения | Заочная форма обучения |
| Общая трудоемкость дисциплины | 180 |  |
| Контактная работа обучающихся с преподавателем  (по видам учебных занятий) (всего) | 48 |  |
| Аудиторная работа (всего): | 48 |  |
| *в том числе:* |  |  |
| лекции | 32 |  |
| семинары, практические занятия | 16 |  |
| лабораторные работы | - |  |
| Внеаудиторная работа (всего): | - |  |
| *в том числе*, индивидуальная работа  обучающихся с преподавателем: | - |  |
| курсовое проектирование | - |  |
| групповая, индивидуальная консультация  и иные виды учебной  деятельности, предусматривающие  групповую или индивидуальную  работу обучающихся с преподавателем | - |  |
| творческая работа (эссе) | - |  |
| Самостоятельная работа обучающихся (всего) | 96 |  |
| Вид промежуточной аттестации обучающегося (экзамен) | 36 |  |

4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины и трудоемкость по видам учебных занятий

(в академических часах)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Наименование раздела /темы дисциплины | Общая трудоём- кость всего  (в часах) | Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость  *(в часах)* | | | | Формы текущего контроля успевае-мости |
| Аудиторные учебные занятия | | | СРО |
| Лек | Сем/Пр | Лаб |
| 1. | **Основные определения** | 32 | 8 | 4 | - | 20 |  |
| 1.1. | Определение обобщённой функции. | 9 | 2 | 1 | - | 6 | Контрольная работа № 1 |
| 1.2. | Пространство основных функций *D*. | 9 | 2 | 1 | - | 6 | Контрольная работа № 1 |
| 1.3. | Пространство обобщенных функций . | 14 | 4 | 2 | - | 8 | Контрольная работа № 1 |
| 2. | **Операции над обобщёнными функциями** | 84 | 16 | 8 | - | 60 |  |
| 2.1. | Дифференцирование обобщенных функций. | 25 | 5 | 2 | - | 18 | Контрольная работа № 1 |
| 2.2. | Прямое произведение обобщенных функций. | 12 | 3 | 1 | - | 8 | ДЗ |
| 2.3. | Свертка обобщенных функций | 17 | 3 | 2 | - | 12 | Контрольная работа № 2 |
| 2.4. | Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. | 17 | 3 | 2 |  | 12 | Контрольная работа № 2 |
| 2.5. | Преобразование Лапласа обобщенных функций. | 13 | 2 | 1 |  | 10 | ДЗ |
| 3. | **Фундаментальные решения** | 28 | 8 | 4 | - | 16 |  |
| 3.1. | Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов. | 13 | 3 | 2 | - | 8 | Контрольная работа № 2 |
| 3.2. | Примеры фундаментальных решений. | 15 | 5 | 2 |  | 8 | Контрольная работа № 2 |

4.2. Содержание дисциплины, структурированное по разделам (темам)

Лекционный курс

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Наименование раздела /темы дисциплины | Содержание |
| 1. | **Основные определения** | |
| 1.1. | Определение обобщённой функции. | Обобщенная функция как обобщение классического понятия функции. Функциональный и секвенциальный подходы к определению обобщенной функции. |
| 1.2. | Пространство основных функций *D*. | Определение основной функции. Примеры. |
| 1.3. | Пространство обобщенных функций . | Определение обобщённой функции. Полнота пространства . Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Формулы Сохоцкого. Простейшие операции над обобщенными функциями (линейная замена переменных и умножение на бесконечно дифференцируемую функцию). |
| 2. | **Операции над обобщёнными функциями** | |
| 2.1. | Дифференцирование обобщенных функций. | Определение производной от обобщённой функции. Свойства обобщённых производных. Примеры. |
| 2.2. | Прямое произведение обобщенных функций. | Прямое произведение обобщенных функций. Свойства прямого произведения. Примеры. |
| 2.3. | Свертка обобщенных функций | Свертка обобщенных функций. Свойства свертки. Существование свертки. Сверточная алгебра обобщенных функций . Регуляризация обобщенных функций. Примеры сверток. |
| 2.4. | Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. | Обобщенные функции медленного роста. Пространство основных функций . Пространство обобщенных функций медленного роста . Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Свойства преобразования Фурье. Примеры. |
| 2.5. | Преобразование Лапласа обобщенных функций. | Преобразование Лапласа обобщенных функций. Примеры. |
| 3. | **Фундаментальные решения** | |
| 3.1. | Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов. | Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов. Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений. |
| 3.2. | Примеры фундаментальных решений. | Фундаментальные решения для линейного дифференциального оператора с обыкновенными производными, для оператора теплопроводности, для волнового оператора, для оператора Лапласа. |

Практические/семинарские занятия

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Наименование раздела /темы дисциплины | Содержание |
| 1. | **Основные определения** | |
| 1.1. | Определение обобщённой функции. | Регулярные и сингулярные обобщённые функции. |
| 1.2. | Пространство основных функций *D*. | Примеры основных функций*.* Сходимость в пространстве *D.* Свойства функции “шапочка” . |
| 1.3. | Пространство обобщенных функций . | Пространство обобщенных функций . Сходимость в пространстве . Формулы Сохоцкого. Линейная замена переменных в обобщенных функциях. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию. |
| 2. | **Операции над обобщёнными функциями** | |
| 2.1. | Дифференцирование обобщенных функций. | Дифференцирование функций, имеющих разрывы первого рода. Решение в пространстве  уравнения . Вторая формула Грина. Первообразная обобщенных функций |
| 2.2. | Прямое произведение обобщенных функций. | Прямое произведение обобщенных функций. |
| 2.3. | Свертка обобщенных функций | Свертка локально интегрируемых функций. Существование свертки. Примеры. Существование свертки произвольной обобщенной функции с финитной обобщенной функцией. Сверточная алгебра обобщенных функций . |
| 2.4. | Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. | Пространство обобщенных функций медленного роста . Теорема Шварца. Преобразование Фурье обобщенных функций из . Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем. Преобразование Фурье свертки. |
| 2.5. | Преобразование Лапласа обобщенных функций. | Преобразование Лапласа обобщенных функций. |
| 3. | **Фундаментальные решения** | |
| 3.1. | Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов. | Фундаментальное решение дифференциального оператора . |
| 3.2. | Примеры фундаментальных решений. | Фундаментальные решения оператора теплопроводности, волнового оператора в, оператора Лапласа, оператора Гельмгольца . |

Лабораторные занятия

Не предусмотрены.

5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

В качестве учебно-методических материалов используется рекомендованная литература.

6. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

6.1. Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Контролируемые разделы (темы) дисциплины (результаты по разделам)** | **Код контролируемой компетенции (или её части) / и ее формулировка** | **Наименование оценочного средства** |
| 1.3 | Пространство обобщенных функций | УК-1: Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий | Контрольная работа № 1 |
| 2.1. | Дифференцирование обобщенных функций. | ОПК-1: Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики | Контрольная работа № 1 |
| 2.3. | Свертка обобщенных функций | ОПК-1: | Контрольная работа № 2 |
| 2.4. | Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. | ОПК-1. | Контрольная работа № 2 |
| 3.1. | Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов. | УК-1 | Контрольная работа № 2 |

6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы

*6.2.1. Экзамен*

В экзаменационном билете два теоретических вопроса: один по аналитическим методам оптимизации, второй – по численным методам оптимизации.

Теоретические вопросы билета:

1. Пространство основных функций *D*. Примеры основных функций (, ).
2. Пространство обобщенных функций . Сходимость в пространстве . Определение и примеры регулярных и сингулярных обобщенных функций.
3. Теорема о полноте пространства .
4. Носитель обобщенной функции. Классификация обобщенных функций.
5. Формулы Сохоцкого.
6. Операции над обобщенными функциями. Линейная замена переменных в обобщенных функциях. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию.
7. Дифференцирование обобщенных функций. Свойства обобщенных производных.
8. Дифференцирование обобщенных функций. Дифференцирование функций, имеющих разрывы первого рода.
9. Дифференцирование обобщенных функций. Решение в пространстве  уравнения .
10. Дифференцирование обобщенных функций. Примеры .
11. Дифференцирование обобщенных функций . Вторая формула Грина.
12. Первообразная обобщенных функций. Примеры.
13. Прямое произведение обобщенных функций. Обоснование корректности определения.
14. Свойства прямого произведения.
15. Свертка локально интегрируемых функций. Существование свертки. Примеры.
16. Определение и свойства свертки обобщенных функций.
17. Свертка обобщенных функций (определение). Существование свертки произвольной обобщенной функции с финитной обобщенной функцией.
18. Свертка обобщенных функций (определение). Сверточная алгебра обобщенных функций .
19. Фундаментальное решение сверточного оператора . Регуляризация обобщенных функций.
20. Обобщенные функции медленного роста. Пространство основных функций . Пространство обобщенных функций медленного роста . Операции над обобщенными функциями медленного роста.
21. Пространство обобщенных функций медленного роста . Теорема Шварца.
22. Структура обобщенных функций с точечным носителем.
23. Преобразование Фурье обобщенных функций из . Обоснование корректности определения.
24. Свойства преобразования Фурье.
25. Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем. Преобразование Фурье свертки.
26. Фундаментальное решение дифференциального оператора . Использование фундаментального решения при решении уравнения .
27. Фундаментальное решение оператора теплопроводности.
28. Фундаментальное решение волнового оператора в.
29. Фундаментальное решение оператора Лапласа .
30. Фундаментальное решение оператора Лапласа .
31. Преобразование Фурье от производной обобщенной функции. Фундаментальное решение оператора теплопроводности.
32. Преобразование Фурье от производной обобщенной функции. Фундаментальное решение волнового оператора в.
33. Фундаментальное решение оператора Гельмгольца .

Критерий оценки – правильность и полнота ответа на вопросы. Оценка выставляется по шкале от 0 до 40 баллов: теоретические вопросы –30 баллов, 10 баллов– дополнительные вопросы. Экзамен считается сданным при оценке не ниже 25 баллов.

*6.2.2. Контрольная работа № 1*

Контрольная работа состоит из трех задач по следующим темам: сходимость в пространстве обобщенных функций, дифференцирование обобщенных функций и свойства обобщенных производных.

а) типовой вариант контрольной работы:

1. Найти предел последовательности  при  в .



2. Найти производные всех порядков для функции  в .



3. Решить уравнение в .



б) критерии оценивания компетенций (результатов) – правильность и полнота выполнения всех шагов решения задачи.

в) описание шкалы оценивания:

Каждая задача оценивается по шкале от 0 до 10 баллов.

Контрольная работа считается выполненной успешно при суммарной оценке не ниже 17 баллов.

*6.2.2. Контрольная работа № 2*

Контрольная работа состоит из трех задач по следующим темам: сверка обобщенных функций, преобразование Фурье обобщенных функций и фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов.

а) типовой вариант контрольной работы:

1. Найти свертку  в .



2. Найти , если 

3. Найти фундаментальное решение оператора .



б) критерии оценивания компетенций (результатов) – правильная работа кода программы, понимание алгоритма метода оптимизации, умение вывести необходимые для алгоритма формулы.

в) описание шкалы оценивания:

Каждая задача оценивается по шкале от 0 до 10 баллов.

Контрольная работа считается выполненной успешно при суммарной оценке не ниже 18 баллов.

6.3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Форма аттестации | Наименование оценочного средства | Баллы |
| Экзамен (100 баллов) | Контрольная работа № 1 | 30 |
| Контрольная работа № 2 | 30 |
| Ответы на экзаменационный билет | 40 |

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная учебная литература:

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. Учебник для вузов 2е изд., ФМЛ, 2004, - 400с. (Имеется в библиотеке ИАТЭ).

2. Владимиров В.С., Михайлов В.П., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука,- 2003, -256с. (Имеется в библиотеке ИАТЭ).

б) дополнительная учебная литература:

1. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, -1979, - 320с.

2. Белов В.В., Воробьев Е.М. Сборник задач по дополнительным главам математической физики. – М: Высш. школа, - 1978, -271с.

3. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. М.: Мир, - 1976, - 312с.

8. Перечень ресурсов\* информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (далее - сеть «Интернет»), необходимых для освоения дисциплины

1. Ресурсы электронно-библиотечной системы издательства «Лань» // URL: [www.e.lanbook.com](http://www.e.lanbook.com) (по подписке).

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

|  |  |
| --- | --- |
| Вид учебного занятия | Организация деятельности студента |
| Лекция | Написание конспекта лекций: кратко, схематично, последовательно фиксировать основные положения, выводы, формулировки, обобщения; помечать важные мысли, выделять ключевые слова, термины. Проверка терминов, понятий с помощью энциклопедий, словарей, справочников с выписыванием толкований в тетрадь. Обозначить вопросы, термины, материал, который вызывает трудности, пометить и попытаться найти ответ в рекомендуемой литературе. Если самостоятельно не удается разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать преподавателю на консультации, на практическом занятии. |
| Практические занятия | Проработка рабочей программы, уделяя особое внимание целям и задачам, структуре и содержанию дисциплины. Работа с конспектом лекций, просмотр рекомендуемой литературы. Изучение выбранной предметной области на примерах решения задач семинарских занятий, индивидуальных домашних заданий. |
| Курсовая работа | Не предусмотрена |
| Контрольная работа | Ознакомиться с основной и дополнительной литературой, включая справочные издания, зарубежные источники, основополагающие термины. Попрактиковаться в решении аналогичных домашних задач по всем темам контрольных работ. |
| Лабораторная работа | Не предусмотрена. |
| Подготовка к экзамену | При подготовке к экзамену необходимо ориентироваться на конспекты лекций и рекомендуемую литературу. |

10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Издательская система LaTeX для подготовки докладов, презентаций и учебного материала.

11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Видеопроектор, компьютер, издательская система LaTeX для подготовки докладов, презентаций и учебного материала.

12. Иные сведения и (или) материалы

12.1. Перечень образовательных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Часов в интерактивной форме – 8.

В ходе практических занятий происходит публичное обсуждение каждой решаемой задачи. При этом студенты высказывают свои мнения по выбору наиболее простого способа поиска оптимального решения.

После решения домашних работ на консультациях проводится разбор допущенных студентами ошибок.

12.2. **Формы организации самостоятельной работы обучающихся (темы, выносимые для самостоятельного изучения; вопросы для самоконтроля; типовые задания для самопроверки**

Некоторые темы изучаются студентами самостоятельно. Для изучения используется приведённая в списке основная и дополнительная литература. Контроль освоения материала осуществляется при проверке контрольных работ, домашнего задания и на экзамене.

| № | Тема и часть, изучаемая (осваиваемая) самостоятельно |
| --- | --- |
| 1.1 | Секвенциальный подход к определению обобщенных функций. Обобщенная функция как класс эквивалентных фундаментальлных последовательностей. |
| 1.2 | Свойства функции “шапочка” . |
| 1.3 | Линейная замена переменных в обобщенных функциях. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию. Свертка обобщенных функций медленного роста. |
| 2.1. | Вторая формула Грина. |
| 2.2 | Прямое произведение обобщенных функций медленного роста. |
| 2.3 | Сверточная алгебра обобщенных функций . |
| 2.4. | Операции над обобщёнными функциями медленного роста. |
| 2.5 | Преобразование Лапласа обобщенных функций. |
| 3.1. | Использование фундаментального решения при решении уравнения . |
| 3.2. | Фундаментальное решение оператора Гельмгольца. |

Вопросы и задания для самоконтроля по всем темам:

1. Что такое основная функция?

2. Что такое обобщённая функция?

3. Как определяется производная от обобщённой функции?

4. Для чего основная функция должна быть бесконечно дифференцируемой?

5. У каких локально интегрируемых функций существует свёртка?

6. Как использовать преобразование Фурье для поиска фундаментальных решений дифференциальных операторов.

7. Как использовать преобразование Лапласа в задачах математической физики?

12.3. Краткий терминологический словарь

|  |  |
| --- | --- |
| Основная функция | Финитная, бесконечно дифференцируемая функция. |
| Обобщенная функция | Линейный непрерывный функционал, действующий на пространстве основных функций. |
|  |  |
|  |  |